Dott. ALESSANDRO GATTI

NUOVE RICERCHE SOPRA L'APPREZZAMENTO DEL CENTRO NELLE FIGURE PIANE GEOMETRICHE

MILANO
SOCIETÀ EDITRICE «VITA E PENSIERO»

1. — Scopo della ricerca

Nel presente scritto sono esposte alcune ricerche, eseguite con lo scopo di stabilire se nella determinazione del centro nelle figure piane geometriche (eseguita indipendentemente da qualsiasi artificio geometrico) si commettono errori, e, in questo caso, da quali cause dipendono e se variano di entità col variare della grandezza della figura.

Le presenti ricerche vennero incominciate nell'ottobre 1923 nell'Istituto di psicologia dell'Università di Torino e proseguite dal marzo 1924 in quello dell'Università Cattolica. Poichè già diedi comunicazione di alcuni dei risultati ottenuti (1), il presente lavoro può essere considerato come un complemento ed una conclusione. Perciò appunto descrivo di nuovo il metodo usato ed i risultati ottenuti nei triangoli, quadrati e cerchi, dei quali è oggetto il lavoro citato. Complessivamente esaminai le seguenti figure: quadrati, rettangoli a base e rispettivamente ad altezza costante, triangoli equilateri, esagoni regolari, rombi e cerchi.

2. — Ordinamento delle esperienze e metodo usato

La figura, disegnata con la massima esattezza senza l'indicazione del centro, viene ricoperta da un foglio di carta trasparente bianca, sul quale è segnato un punto. Il soggetto ha il compito di spostare il foglio di carta trasparente sinchè il punto, su essa disegnato, coincide, a giudizio suo, col centro. Lo sperimentatore allora o il soggetto stesso, fissa sul foglio di carta trasparente, con una matita, due vertici, trattandosi di triangoli, quadrati, rettangoli, rombi; tre punti della circonferenza, trattandosi di cerchi e tre vertici, trattandosi di esagoni.

(1) A. Gatti, *Archivio It. di Psicologia*, Torino, 1924.

Per determinare l'entità dell'errore, segnato il centro sulla figura presentata, si fanno coincidere coi vertici i punti corrispondenti della carta trasparente e si fissa con la matita il centro geometrico. La distanza tra il punto così stabilito e quello segnato sulla carta trasparente, e la loro posizione relativa, ci danno l'entità e la direzione dell'errore commesso. Gli spostamenti vengono eseguiti in due sensi. Presentata al soggetto la figura, per esempio un quadrato, si pone il foglietto di carta trasparente una prima volta in modo che il punto si trovi sul lato superiore ed il soggetto debba eseguire gli spostamenti dall'alto verso il basso, una seconda volta sul lato inferiore, dimodochè gli spostamenti si abbiano ad eseguire dal basso verso l'alto.

Per quanto gli spostamenti vengano eseguiti senza l'aiuto di mezzi meccanici si raggiunge, dopo esperienze preliminari, una esattezza del tutto sufficiente, come appare d'altronde dai risultati ottenuti. Le esperienze preliminari debbono essere proseguite, sinchè i movimenti occorrenti per spostare i foglietti di carta trasparente siano divenuti del tutto automatici: ciò per evitare il pericolo di una dispersione dell'attenzione.

S'intende che lo spessore delle linee di contorno ed il diametro del punto centrale debbono rimanere costanti, e che i punti di riferimento vanno segnati con matita finemente appuntita. Le misure vengono eseguite con l'ausilio di una lente da orologiaio e di un doppio decimetro di precisione.

Questo metodo sebbene conduca ad un errore di circa due decimi di millimetro, non potendosi eseguire a mano spostamenti minori, si avvantaggia tuttavia di una grande semplicità e s'avvicina alla pratica di chi segna il centro di una figura.

Su foglietti di carta bianca privi di imperfezioni aventi le dimensioni di circa 13 cm. per 13 (ed anche più per le figure maggiori) segnai un punto circolare, spostato alquanto rispetto al centro del foglietto, di 0,5 mm. di diametro. Io stesso compii le esperienze definitive, le quali vennero eseguite monocularmente e cioè con l'occhio destro, sempre alla stessa luce, sul medesimo tavolo, ricoperto da un grande foglio di cartoncino bianco, e sotto le migliori condizioni fisiche. Nessuna determinazione venne fatta durante uno stato di stanchezza. Le misure vennero eseguite (nel modo indicato), dopo aver sperimentato su una serie completa di figure.

Il metodo seguito si può dire dell'errore medio secondo quanto su di esso scrivono il Fechner (1), il Wundt (2) ed il Müller (3), ove si consideri la posizione geometricamente esatta del centro come stimolo normale. In tal caso la differenza tra questa posizione e quella soggettivamente determinata dà senz'altro il singolo errore commesso. La media dei singoli errori rappresenta l'errore costante medio (F). Le differenze tra questo ed i singoli errori costituiscono i singoli errori variabili (Δ), la media dei quali (Δm), ricavata secondo la formula (4):

$$\Delta m = \frac{\Sigma \Delta}{\sqrt{n(n-1)}}$$

(dove n significa il numero delle singole determinazioni), rappresenta l'errore medio variabile.

Per decidere se l'errore medio costante F sia dovuto a cause accidentali od a una causa costante ho calcolato l'errore probabile w secondo la formula (5):

$$w = \frac{0{,}8453 \Sigma \Delta}{\sqrt{n - 0{,}42921}}$$

Si potrebbe obbiettare che per ricavare il valore medio F il numero delle determinazioni sia troppo esiguo, ma il piccolo valore di w giustificò a ritenerle sufficienti. Ricavai F dalla media aritmetica dei due singoli valori, facendo la media delle determinazioni, eseguite con spostamenti dall'alto verso il basso, e dal basso verso l'alto, e ciò perchè i due valori non differiscono molto fra di loro (6).

Per rendere evidente se il valore F varia con la grandezza delle figure presentate, lo divisi per il lato delle medesime, chiamando il valore così ottenuto *errore medio relativo*.

Feci tutti i calcoli, come fu già detto, dopo aver finito le esperienze su tutte le serie di una figura. In breve: adottai tutte le precauzioni consigliate in ricerche analoghe. Ciò detto, ecco i risultati per le varie figure.

---

(1) G. Th. Fechner, *Elemente der Psychophysik*, 2ª ed. (Wundt) I, pp. 120 e segg., 1889. *Revision der Hauptpunkte der Psychophysik*, pp. 104 e segg., 1882.
(2) W. Wundt, *Grundzüge d. physiol. Psychologie*, I⁶, pp. 595 e segg., 1908.
(3) G. E. Müller, *Die Gesichtspunkte u. die Tatsachen d. psychophys. Methodik*, pp. 190 e segg. 1904. Nella nomenclatura seguo il Müller.
(4) G. E. Müller, *op. cit.*, pag. 192.
(5) G. E. Müller, *op. cit.*, pag. 193.
(6) Wundt, *op. cit.*, pag. 597.

3. — Risultati ottenuti nei triangoli equilateri

Esaminai 10 triangoli equilateri, ordinati in serie così che i singoli termini variavano secondo la grandezza dei lati, i quali da 10 mm. aumentavano di 10 in 10 mm. sino a 100 mm. Pertanto i singoli triangoli stavano fra loro come: 1 : 2 : 3 ...... : 10.

L'errore si commette sempre verso l'alto, rispetto la posizione del centro geometrico. Questo fatto non subì mai eccezione alcuna, neppure nelle esperienze preliminari ed in quelle fatte con altri soggetti. Talvolta il centro soggettivo è spostato lievemente verso destra, non mai a sinistra, generalmente sulla mediana verticale.

Nella tabella I sono riferiti i risultati e cioè i singoli errori commessi nelle dieci determinazioni per ognuno dei dieci triangoli. Le dieci determinazioni, contrassegnate con numeri romani, sono disposte in modo che quelle dal I al V indicano i risultati ottenuti con spostamenti dall'alto verso il basso, e viceversa dal VI al X; in ordine di esecuzione per modo che venne eseguita la I e poi la VI, quindi la II e poi la VII, e così via. I valori indicati in questa e nelle altre tabelle sono espressi in millimetri.

Tabella I.

Determinazioni	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*100*
I	0.60	1.00	1.20	1.50	2.00	2.80	2.50	3.00	3.75	3.75
II	0.50	0.75	1.50	1.25	2.75	2.50	2.50	3.75	5.00	5.00
III	0.50	1.00	1.00	1.50	1.80	2.00	2.75	3.50	3.60	4.50
IV	0.25	0.90	1.25	1.60	2.75	2.50	3.50	3.00	2.50	4.50
V	0.25	1.20	1.00	1.80	3.00	2.75	2.50	3.25	4.25	4.25
VI	0.00	0.75	0.75	1.25	1.75	2.50	2.50	2.60	3.75	4.25
VII	0.00	0.75	1.00	1.40	1.25	2.75	3.00	3.00	3.50	3.75
VIII	0.20	0.75	1.20	1.50	2.00	2.60	2.75	3.40	4.00	3.50
IX	0.40	0.75	0.80	1.80	2.25	2.75	2.50	3.40	3.50	4.00
X	0.00	0.75	1.00	1.40	2.00	2.50	2.50	2.60	3.50	4.25

Nella tabella II sono raccolte le medie dei singoli errori, l'errore medio variabile, l'errore probabile, l'errore costante relativo, espresso in numeri decimali ed in frazione unitaria. *Fo* significa la media aritmetica dei singoli errori ottenuti con spostamenti dall'alto al basso, *Fu* il viceversa, *F* l'errore costante medio, ottenuto dalla media aritmetica di *Fo* e *Fu*, Δm l'errore medio variabile, w l'errore probabile di F, $\frac{F}{l}$ l'errore costante medio relativo al lato.

TABELLA II.

Triangolo presentato	*Fo*	*Fu*	*F*	Δm	w	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
10	0.42	0.12	0.270	0.1940	0.0500	0.0270	$\frac{1}{37.04}$
20	0.97	0.75	0.860	0.1391	0.0361	0.0430	$\frac{1}{23.26}$
30	1.19	0.95	1.070	0.1834	0.0475	0.0357	$\frac{1}{28.01}$
40	1.53	1.47	1.500	0.1476	0.0383	0.0375	$\frac{1}{26.67}$
50	2.35	1.96	2.155	0.2456	0.0637	0.0431	$\frac{1}{23.20}$
60	2.51	2.62	2.565	0.1739	0.0451	0.0428	$\frac{1}{23.39}$
70	2.75	2.65	2.700	0.2530	0.0656	0.0386	$\frac{1}{25.93}$
80	3.30	3.00	3.150	0.3268	0.0847	0.0394	$\frac{1}{25.40}$
90	3.82	3.65	3.735	0.4375	0.1134	0.0415	$\frac{1}{24.10}$
100	4.40	3.95	4.175	0.3584	0.0329	0.0418	$\frac{1}{23.95}$

Dall'esame dei risultati esposti nella tabella II osservo anzitutto che *Fo* è superiore a *Fu*, se si eccettua il triangolo

di 60 mm. di lato. Tuttavia la differenza tra i due valori è piccola; perciò ricavai F come negli altri casi dalla media aritmetica (1).

Risulta inoltre che l'errore F aumenta proporzionalmente alla grandezza dei lati dei triangoli esaminati, così che l'errore relativo ai lati dovrebbe essere uguale ad una costante. Infatti, se riduciamo gli errori relativi, commessi per i triangoli da 20 a 100 mm. di lato, alla seconda cifra decimale, otteniamo una costante uguale a 0,04. Da questa media si scostano più o meno i singoli valori, come è manifesto nella figura 1, nella quale sulla linea delle ascisse, alla distanza di 15 mm. sono portate le grandezze dei lati nella loro successione: le rispettive ordinate corrispondono ai valori di $\frac{F}{l}$ (ridotti alla seconda cifra decimale), per modo che ad ogni unità della seconda cifra decimale corrispondono 2 mm. Come ho già detto i valori di $\frac{F}{l}$ per i triangoli di 10 e 20 mm. di lato sono considerati qui uguali a 0,03089 e 0,0375. S'aggiunga che per la pubblicazione la figura 1 venne ridotta a due terzi.

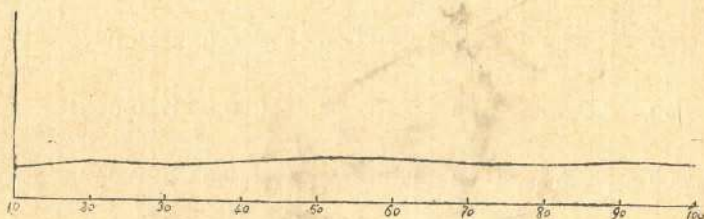



Fig. 1.

Se ora si suppone l'errore che si commette nel determinare il centro del triangolo di 1 mm. di lato uguale ad a, l'errore

---

(1) Potrebbe fare eccezione il valore di F per il triangolo di 10 mm. di lato, valore che, ricavato con la media aritmetica, è uguale a 0,27, con la media geometrica a 0,3089 avvicinandosi di più all'andamento degli altri F. Nel triangolo di 20 mm., mentre nella tabella II ho dato il valore di F, dedotto dalla media aritmetica di Fo ed Fu, nelle curve ho considerato il solo Fu, in cui l'errore variabile è uguale a zero. Si ottengono così i valori: $F = 0{,}75$, $\Delta m = 0$, $w = 0$, $F = 0{,}0375 = \frac{1}{24{,}67}$, più conformi all'andamento delle curve.

di un qualsivoglia altro triangolo di n mm di lato sarà uguale a

$$F = (a.\, n) \pm k \text{ ...... 1)}$$

ove k rappresenta un errore, variabile di volta in volta. L'errore commesso nel triangolo di 1 mm. di lato è uguale altresì all'errore di un qualsivoglia triangolo diviso per il corrispondente lato:

$$a = \frac{F \pm k}{n} \text{ ...... 2)}$$

L'errore a ottenuto in tal modo è quello che io chiamo *errore costante* relativo al lato, il cui valore medio è uguale a 0,04; e, poichè rappresenta nel tempo stesso l'errore che si commetterebbe in un triangolo di 1 mm. di lato, per mezzo dell'equazione 1) possiamo calcolare i valori dei singoli F quali dovrebbero essere, essendo valida la legge di proporzionalità, secondo le varie determinazioni. Nella tabella III sono messi a confronto i valori di F risultanti dal calcolo e quelli ottenuti sperimentalmente, come pure la differenza k per i triangoli da 20 a 100 mm. di lato.

TABELLA III.

Triangolo	F. ottenuto per calcolo	F. ottenuto speriment.	k.
20	0.80	0.750	— 0.050
30	1.20	1.070	— 0.130
40	1.60	1.600	0.000
50	2.00	2.155	+ 0.155
60	2.40	2.565	+ 0.165
70	2.80	2.700	— 0.100
80	3.20	3.150	— 0.050
90	3.60	3.735	+ 0.135
100	4.00	4.175	+ 0.175

Che valore attribuire a k? L'errore medio variabile Δm più che l'espressione di una causa d'errore valevole per tutte le determinazioni di una serie, rappresenta, a parer mio, l'indice di quelle cause perturbatrici che di volta in volta intervengono.

L'errore probabile che è funzione di Δm indica la probabilità di errore della media, dato un certo Δm. k invece, che rappresenta gli scarti dei singoli errori costanti medi, indica piuttosto un errore legato alle determinazioni eseguite o dall'alto verso il basso o dal basso verso l'alto e, con la successione dei segni, le oscillazioni di questo errore.

Se poi osserviamo che nei singoli triangoli k ora è minore ora è maggiore a seconda si consideri *Fo* o *Fu* senza dimostrare alcuna determinata tendenza; se osserviamo che k è spesso negativo vale a dire non raggiunge quel valore che si ottiene per mezzo di calcoli basati sulle medie, si deduce che oltre alla causa predominante dell'errore costante ve n'è un'altra che agisce in senso contrario ad essa e che a seconda delle oscillazioni dell'attenzione ha maggiore o minore influenza o non ne ha alcuna.

L'errore costante che si commette, determinando il centro di un triangolo, è dovuto a più cause: l'una consiste nella nota illusione del triangolo equilatero, per la quale questo è visto come isoscele; la seconda nel sovrapprezzamento della metà superiore delle figure. Ed inoltre, siccome il centro di un triangolo equilatero dista in modo uguale dai tre vertici, si ha che il vettore verticale appare maggiore che non i vettori laterali (fig. 2). Nella costruzione del centro questa illusione influisce

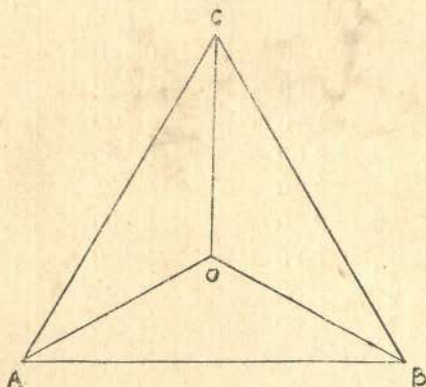



Fig. 2.

nel senso che, cercando di eguagliare i tre vettori apparentemente disuguali, si deve spostare il centro *o* verso l'alto. Ed

influisce tanto più perchè durante la costruzione del centro col metodo descritto i tre vettori appaiono come tre linee soggettive più chiare dello sfondo, linee che tuttavia subiscono oscillazioni.

Entra in giuoco tuttavia ancora un'altra illusione di effetto contrario alla descritta. Oltre dai vertici il centro di un triangolo dista in modo eguale anche dai punti medii dei lati. Questi tre vettori si presentano pure come linee soggettive ed il vettore verticale appare più lungo di quelli obliqui. (fig. 3).

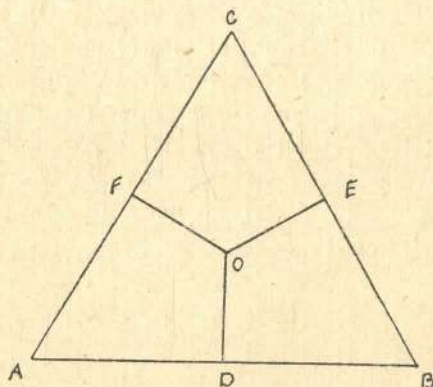



Fig. 3.

Nella costruzione del centro questa illusione tende a fare spostare il centro verso il basso ed in misura maggiore di quanto più verso l'alto lo si è spostato, volendo eguagliare le tre distanze dai vertici. Confrontando le due figure 2 e 3 si può osservare l'influenza delle dette illusioni. In fig. 2 il centro *o* appare spostato in basso ed *OC* notevolmente maggiore di *OA* ed *OB*. Anche in fig. 3 esso appare spostato in basso, ma di meno che in fig. 2: *OD* sembra più lungo di *OE* ed *OF* e più ancora confrontando questa linea con la stessa distanza della fig. 2. La illusione di Müller-Lyer e quella che spazi pieni appaiono maggiori dei vuoti hanno qui speciale importanza.

L'influenza che questi fenomeni esercitano sulla determinazione del centro, è così forte che si proiettano sulla figura le corrispondenti linee soggettive più chiare dello sfondo. Riguardo alla determinazione del centro, le due figure agiscono

in senso contrario: quanto più si cerca di eguagliare i vettori della fig. 2, tanto più aumenta la diseguaglianza fra i vettori della fig. 3.

Queste due cause di errore di opposto effetto producono un vero disturbo nella coscienza del soggetto, disturbo che si manifesta con un sentimento di tonalità sgradevole e che segue le oscillazioni dell'attenzione verso l'una o l'altra illusione. Avviene una vera gara fra le due rappresentazioni del triangolo col centro equidistante dai vertici e del triangolo col centro equidistante dai punti medii dei lati. S'impone tuttavia la prima a cui è legata l'illusione più appariscente. Anzi, in talune determinazioni l'imporsi di essa ha per effetto che si va al di là di quel che comporterebbe l'illusione stessa. La rappresentazione invece del centro equidistante dai punti medi dei lati diminuisce l'errore verso l'alto. Ciò avviene specialmente nelle determinazioni eseguite con spostamenti dal basso verso l'alto. Così mentre nei triangoli di 50, 60, 90 e 100 mm. di lato, k è positivo, manifestando l'azione della prima rappresentazione,

Fig. 4.

negli altri invece la seconda rappresentazione ha maggiore influenza e k risulta negativo.

Queste oscillazioni dovute alla gara suddetta sono manifeste nella figura 4 dove sulla linea delle ascisse sono portate alla distanza di 15 mm. le grandezze dei lati nella loro successione; le corrispondenti ordinate rappresentano i valori di F ridotti alla prima cifra decimale, per modo che ad ogni decimo del valore arrotondato corrispondono due millimetri. La linea piena rappresenta l'andamento degli errori ottenuti sperimentalmente, la linea punteggiata quello degli errori ricavati per mezzo del calcolo. Si vede chiaramente che le deviazioni avvengono con oscillazioni ora al disopra ora al disotto della linea piena. Anche questa figura venne ridotta a due terzi.

Tenuto conto di quanto fu detto, si comprende come la curva degli errori relativi ai lati (fig. 1) presenti dei minimi in corrispondenza dei triangoli di 10, 30, 70 e 80 mm. di lato, e dei massimi in corrispondenza di 20, 50, 60, 90 e 100 mm.; massimi e minimi che si alternano quasi simmetricamente.

4. — Risultati ottenuti negli esagoni

Esaminai una serie di cinque esagoni, varianti secondo la grandezza dei lati, i quali da dieci mm. aumentavano sino a cinquanta nella proporzione come 1 : 2.... : 5. Ottenni due serie di risultati, perchè esperimentai prima sugli esagoni orientati con due lati orizzontali e quindi sugli stessi con due lati verticali. Delle due serie di risultati è detto separatamente.

Risultati ottenuti negli esagoni a due lati orizzontali. — Negli esagoni così orientati l'errore è sempre commesso verso l'alto, talvolta spostato verso destra.

Eseguii dieci determinazioni per ogni esagono, con spostamenti alternativamente dall'alto in basso e viceversa. Nella tabella IV sono esposti i risultati ottenuti delle singole determinazioni, le quali anche qui sono contrassegnate da numeri romani ed in tal modo che dalla I alla VI sono indicate quelle eseguite con spostamenti dall'alto verso il basso, e dalla VI alla X quelle dal basso verso l'alto. Riguardo all'ordine di esecuzione alla prima segue la VI, alla II la VII e così via.

TABELLA IV.

Determinazioni	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*
I	0.25	0.50	0.75	1.00	1.00
II	0.25	0.40	0.50	0.90	1.20
III	0.25	0.25	0.75	0.50	0.90
IV	0.00	0.60	0.25	0.90	1.25
V	0.00	0.60	0.40	0.50	0.75
VI	0.25	0.50	0.75	0.50	1.25
VII	0.40	0.50	0.75	0.75	0.75
VIII	0.00	0.50	0.60	1.00	1.00
IX	0.25	0.25	0.60	0.80	0.75
X	0.00	0.40	0.50	0.50	1.00

Nella tabella V sono dati invece i valori degli errori medi, ricavati ed esposti analogamente a quanto è stato fatto per i triangoli.

TABELLA V.

Esagono presentato	*Fo*	*Fu*	*F*	Δm	*w*	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
10	0.15	0.18	0.165	0.1391	0.0997	0.0165	$\frac{1}{60.61}$
20	0.47	0.43	0.450	0.1054	0.0755	0.0225	$\frac{1}{44.44}$
30	0.53	0.64	0.585	0.1244	0.0891	0.0195	$\frac{1}{52.48}$
40	0.76	0.71	0.735	0.1982	0.1419	0.0184	$\frac{1}{54.42}$
50	1.02	0.95	0.985	0.1665	0.1192	0.0197	$\frac{1}{50.76}$

Dai risultati esposti nelle tabelle IV e V è chiaro che l'errore commesso nel determinare il centro di un esagono a due

lati orizzontali, non soltanto è diretto verso l'alto, ma aumenta proporzionalmente ai lati, ossia alla grandezza della figura. Ne segue che l'errore relativo al lato è uguale ad una costante e che anche qui si può applicare la equazione di proporzionalità

$$F = (a.\ n) \pm k$$

nella quale a significa l'errore che si commetterebbe in un esagono di un mm. di lato.

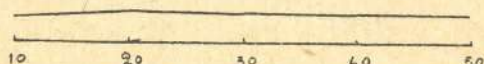



Fig. 5.

Dalla media degli errori relativi che risulta uguale a 0.019315 e se vogliamo, riducendo alla terza cifra decimale a 0.019 si scostano i singoli errori relativi e specialmente quelli degli esagoni 10 e 20. Ciò è manifesto nella figura 5, ove è data la curva rappresentante l'andamento degli $\frac{F}{l}$. Ho seguito le medesime riduzioni della corrispondente curva dei triangoli.

Anche per gli esagoni dall'errore che si commetterebbe in un esagono di un millimetro di lato, uguale, per le considerazioni già dette nel caso dei triangoli alla media degli errori relativi, ossia a 0.019, è possibile calcolare i singoli errori F quali dovrebbero essere, se fosse seguita rigorosamente la legge di proporzionalità diretta, ed i valori dei singoli k, rappresentanti gli scarti. Nella tabella VI sono appunto esposti tali valori.

TABELLA VI.

Esagono	F ottenuto per calcolo	F ottenuto sperimental.	k
10	0.19	0.165	— 0.025
20	0.38	0.450	+ 0.070
30	0.57	0.585	+ 0.015
40	0.76	0.735	— 0.025
50	0.95	0.985	+ 0.035

Nella figura 6 sono espressi graficamente i medesimi valori nella stessa scala per i triangoli. La linea punteggiata rappresenta l'andamento dell'errore ideale, quella piena dell'errore, ottenuto sperimentalmente.

Dall'esame dei valori di k e dalla curva della figura 6 si può dedurre senz'altro che negli esagoni esaminati, gli errori com-

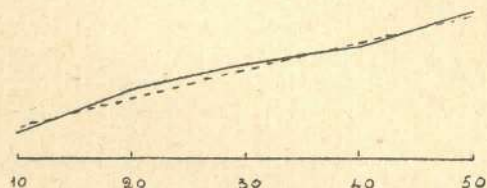



Fig. 6.

messi nel determinare il centro seguono con grande approssimazione un rapporto di proporzionalità diretta con la grandezza della figura; che gli scarti k non possono essere attribuiti che a cause d'errore variabili di volta in volta e che infine per ognuno

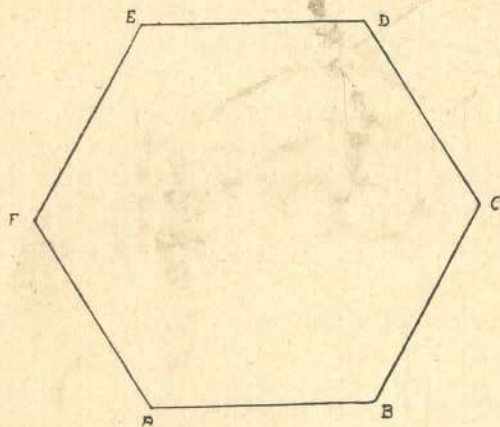



Fig. 7.

dei termini della serie deve agire una causa che rimane sempre la medesima. Questa mi pare sia riposta nello speciale presentarsi degli esagoni aventi due lati orizzontali.

Essi appaiono più alti e rispettivamente più stretti di quel che sono in realtà. Si osservi la fig. 7. Per quanto in essa l'esagono disegnato appaia come un complesso unico, tuttavia osservando, si può senz'altro riconoscere che i lati orizzontali *AB* e *ED* appaiono notevolmente minori dei lati obliqui e ciò per la ben nota illusione che distanze orizzontali sono sottoapprezzate rispetto alle corrispondenti verticali ed oblique. *EA* e *DB* sembrano maggiori di qualsiasi altra diagonale dell'esagono. Da queste illusioni a cui sono legate le varie parti del complesso, risulta a questo uno speciale aspetto. L'esagono centrato segue naturalmente le medesime leggi, anzi per così dire ne favorisce l'effetto, perchè agevola, quasi fosse un punto di riferimento, la rappresentazione delle direzioni verticali. Infatti nel processo di determinazione del centro, ho potuto osservare che si ha la rappresentazione, completata da linee soggettive più chiare dello sfondo, del rettangolo *ABDE*. È molto difficile potersi sottrarre da ciò, tanto che il centro viene riferito più a questa nuova figura che all'intero esagono. Parrebbe più agevole la divisione dell'esagono in due trapezi *FABC* ed *FEDC*; ciò non avviene e, sebbene alcune volte l'attenzione oscilli fra la rappresentazione del trapezio e quella del rettangolo, subito predomina la rappresentazione del rettangolo.

Debbo richiamare l'attenzione del lettore sull'importanza che possono avere questi fenomeni nello studio delle percezioni delle forme. Non si può fare a meno di riflettervi osservando come, dalle proprietà delle singole parti di una forma, dipenda il modo di presentarsi di essa e come ciò avvenga intimamente. L'introduzione di un nuovo elemento in una forma, costituita secondo il numero minimo necessario di elementi, non reca con sè un completamento della figura od una nuova figura (quale nel caso mio dell'esagono centrato, che si potrebbe considerare come un tutto), ma piuttosto agevola lo scomporsi della prima forma, e dai vari elementi di essa, il costituirsi di nuove forme, che sono, o per l'una o per l'altra causa, più facilmente percepite.

Determinato il centro, con l'osservare della figura nasceva in me oltre alla rappresentazione del rettangolo *EABD* quella del rettangolo *FBCE*. Queste due rappresentazioni si succede-

vano con rapide oscillazioni dell'attenzione e precisamente con il ritmo da *FBCE* a *EABD*; questo fenomeno provocava l'accennarsi di una illusione di moto apparente e cioè di una rotazione dell'esagono nel senso delle lancette dell'orologio. Non osservai mai il formarsi della rappresentazione del rettangolo *FACD* ed una illusione di moto nel senso inverso. Mi pare che ciò sia dovuto alla visione monoculare destra.

Nella rappresentazione dunque del rettangolo *EABD* si deve trovare la causa dell'errore. L'esame dei quadrati e dei rettangoli, nei quali tale forma è esaminata da sola ce ne darà la risposta, come dirò in seguito.

Risultati ottenuti negli esagoni a due lati verticali. — Poichè l'aspetto dell'esagono orientato in questo modo differisce da quello che assume con due lati orizzontali; così muta di direzione e di entità l'errore commesso nel determinarne il centro. Questo viene spostato sempre verso il basso con lieve tendenza verso destra.

Nelle tabelle VII ed VIII sono esposti, come nei casi precedenti, gli errori delle singole determinazioni ed i vari errori medi.

TABELLA VII.

Determinazioni	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*
I	0.25	0.50	0.75	0.75	0.40
II	0.50	0.90	0.50	1.00	0.50
III	0.40	0.60	0.60	0.75	0.50
IV	0.40	0.50	0.50	1.25	0.90
V	0.25	0.40	0.90	0.60	1.25
VI	0.40	0.75	1.20	1.20	1.00
VII	0.50	0.60	0.75	1.20	1.10
VIII	0.00	0.60	0.60	0.50	1.10
IX	0.25	0.40	0.60	0.60	1.40
X	0.40	0.75	1.20	1.25	1.00

TABELLA VIII.

Esagono presentato	Fo	Fu	F	Δm	w	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
10	0.36	0.31	0.335	0.1566	0.03224	0.0335	$\frac{1}{29.85}$
20	0.58	0.62	0.600	0.1265	0.03279	0.0300	$\frac{1}{33.33}$
30	0.65	0.87	0.760	0.2140	0.05547	0.0253	$\frac{1}{39.50}$
40	0.87	0.95	0.910	0.2846	0.07377	0.0228	$\frac{1}{43.94}$
50	0.71	1.12	0.915	0.2677	0.06940	0.0183	$\frac{1}{56.64}$

L'esame di questi risultati non dimostra più un rapporto di proporzionalità diretta secondo l'equazione $F = (a.n) \pm k$; dimostra invece che l'errore relativo diminuisce col crescere della grandezza della figura più che non lo comporti la proporzionalità stessa. Infatti se anche qui dalla media degli $\frac{F}{l}$, uguale a 0.026, ricaviamo l'andamento degli errori F, come già si è fatto antecedentemente, otteniamo i valori della tabella IX, nella quale sono esposti gli F ottenuti per calcolo, quelli ottenuti sperimentalmente, e le differenze k.

TABELLA IX.

Esagono	F ottenuto per calcolo	F ottenuto sperimental.	k
10	0.26	0.335	+ 0.075
20	0.52	0.600	+ 0.080
30	0.78	0.760	— 0.020
40	1.04	0.910	— 0.130
50	1.30	0.915	— 0.385

Nella figura 8 sono espressi graficamente i medesimi valori della tabella IX. Sopra la linea delle ascisse alla distanza di 15 mm. sono portati i lati degli esagoni; le ordinate corrispondenti rappresentano i valori degli *F* ridotti alla seconda cifra decimale ed in modo che ad ogni unità della prima cifra decimale corrispondono due millimetri. La linea punteggiata rappresenta l'andamento degli *F* ottenuti per calcolo, quella piena gli *F* ottenuti sperimentalmente.

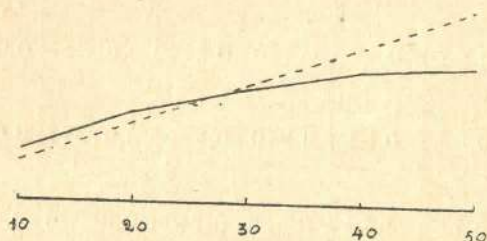
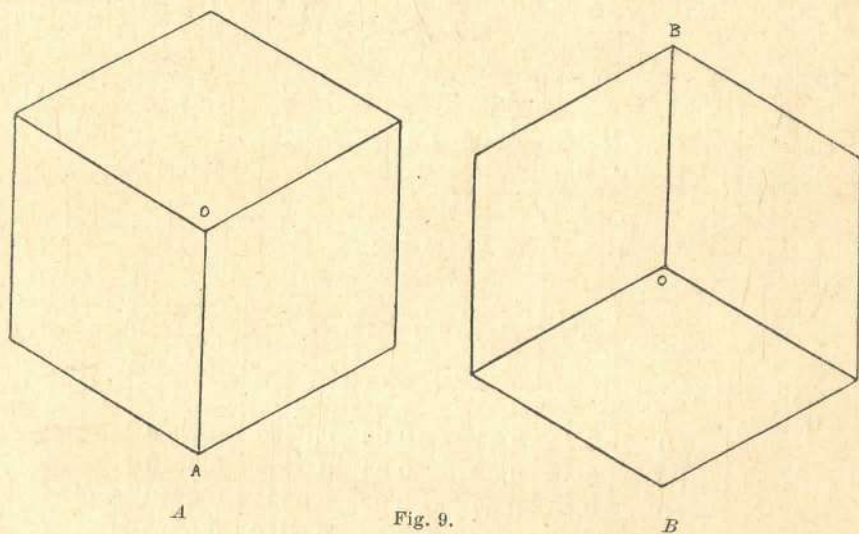



Fig. 8.

Risulta dall'esame della tabella IX e dalla figura 8 che, se consideriamo la proporzionalità reale con quella ideale, avente a base la media dei valori relativi, osserviamo che, mentre l'errore per l'esagono 30 coincide quasi con quello ottenuto per mezzo del calcolo; quelli per 20 e 10 sono maggiori; minori quelli per 40 e 50. Inoltre l'andamento di k è quanto mai regolare; infatti partendo dal valore di k per l'esagono 30 abbiamo che tra questo e il valore di k per l'esagono 20 la differenza è di 0.10 tra quest'ultimo ed il k dell'esagono 10 la differenza è di 0.05. Parimenti tra il k dell'esagono 30 e quello dell'esagono 40 la differenza è di 0,11 tra quest'ultimo e quello di 50 la differenza è 0.255. Ossia: le differenze tra i varî k diminuiscono verso 20, ed aumentano verso 40 con una progressione geometrica, partendo dal k di 30.

Pertanto, se è vero che l'errore, quando dipende da una sola causa variabile secondo l'estensione, varia in proporzione diretta esso pure; in questo caso abbiamo che, aumentando la grandezza delle figure, la causa di errore è diminuita nei suoi effetti costantemente e regolarmente da una causa di effetto contrario. Senza ulteriori sviluppi matematici, che forse

non sarebbero consentiti dall'esiguo numero dei valori e che d'altronde non avrebbero eccessiva importanza nel caso nostro, non vi può essere dubbio su quanto ho detto.

Nel caso dei triangoli ho fatto notare che la illusione, causa dell'errore nell'apprezzamento del centro, subiva il disturbo di un'altra illusione di segno contrario alla prima e che l'effetto della gara, producentesi nella coscienza, si manifestava con una oscillazione dei valori di k. Un processo analogo a quello avviene pure nel caso degli esagoni a due lati verticali. Infatti il centro, nuovo elemento, che si introduce nel complesso, provoca la rappresentazione di varie forme, alcune delle quali soggette a notevoli illusioni. Fra queste, due sono predominanti sopra le altre; esse sono rappresentate dalla figura 9 (*A* e *B*).

A Fig. 9. *B*

Queste due figure, simili a quelle della figura 2 per i triangoli sono soggette ad una illusione per la quale il segmento verticale appare notevolmente maggiore di quelli obliqui. Esse si manifestano come rappresentazioni, completate da linee soggettive più chiare dello sfondo, e quella di *A* (fig. 9) è la predominante. Il suo effetto consiste in ciò che volendosi eguagliare i tre vettori il centro viene abbassato notevolmente. Ma così facendo viene esagerata la diseguaglianza (in parte non più

apparente) tra i vettori della figura *B*. Tuttavia la gara fra le due rappresentazioni non porta, come nel caso dei triangoli, ad una oscillazione, ma piuttosto ad uno stato di equilibrio.

L'imporsi della figura *A* mi pare sia dovuto a due cause: anzitutto al fatto che l'esperienze erano eseguite osservando sotto un angolo visivo inferiore, sebbene di poco, al retto, verso il basso, cosicchè gli stessi movimenti oculari verso l'alto ne agevolavano la formazione; e quindi al fatto che l'illusione, legata a detta figura, è maggiore di quella legata alla figura *B*, ciò che si può osservare, mettendo a confronto i due segmenti *OA* e *OB*, dei quali il primo appare maggiore del secondo.

Ho osservato poi che nelle determinazioni del centro con spostamenti dal basso verso l'alto si impone subito la rappresentazione della figura *A*, mentre negli spostamenti opposti s'impone soltanto quando il punto mobile è vicino al centro. Teoricamente quindi si può dedurre che gli errori commessi nel primo caso saranno maggiori dei corrispondenti nel secondo caso. Ciò è pure dato dall'esperienza. Nella tabella X sono posti a confronto *Fo* e *Fu*, le differenze *Fu-Fo* ed i rispettivi errori relativi.

TABELLA X.

Esagono	*Fo*	*Fu*	*Fu-Fo*	$\frac{Fo}{l}$	$\frac{Fu}{l}$
10	0.36	0.31	— 0.05	0.0360	0.0310
20	0.58	0.62	— 0.04	0.0290	0.0310
30	0.65	0.87	+ 0.22	0.0225	0.0290
40	0.87	0.95	+ 0.08	0.0218	0.0238
50	0.71	1.12	+ 0.41	0.0142	0.0240

Se si eccettua il caso dell'esagono 10 per tutti gli altri esagoni la differenza fra *Fu* ed *Fo* è positiva. I valori degli errori relativi fanno vedere che, nelle determinazioni dal basso verso l'alto, essi diminuiscono assai meno rapidamente che in quelle dall'alto verso il basso. Ciò significa che nelle prime agisce indisturbata o quasi la causa d'errore derivante dalla figura *A*,

mentre nelle ultime influisce maggiormente la causa d'errore della figura *B*.

Inoltre si deduce che, mentre negli esagoni minori la rappresentazione della figura *A* è veramente predominante, nei maggiori s'impone anche la causa d'errore della figura *B*. Ma poichè, come dissi, si giunge ad uno stato di equilibrio, gli errori si scostano dalla legge di proporzionalità diretta, non con oscillazioni, ma con una progressione che abbiamo visto è geometrica.

Nella figura 10 è data la curva degli errori relativi nella medesima scala adottata per la corrispondente curva nei triangoli. L'andamento degli errori relativi non rappresenta più una parallela, ma una retta formante un certo angolo con la linea della ascisse.

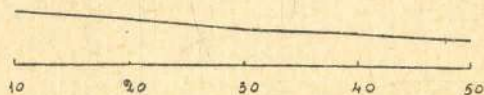



Fig. 10.

Noto infine alcune altre illusioni ottiche che si possono osservare nelle due figure *A* e *B*. Anzitutto la illusione di prospettiva (seguente quella di estensione) che tende a correggere la disuguaglianza dei tre vettori portandoli in piani differenti. I tre rombi poi, in cui vengono scomposti gli esagoni, appaiono notevolmente disuguali e precisamente i due rombi, aventi due lati verticali, appaiono uguali tra di loro e maggiori del terzo. I due lati verticali appaiono maggiori degli obliqui. Illusioni tutte di cui sono noti i motivi, e che imprimono all'esagono un carattere diverso da quello che ha in realtà.

5. — Risultati ottenuti nei quadrati

Esperimentai sopra una serie di dieci quadrati i cui lati variavano da 10 mm. a 100 mm. nel rapporto come 1 : 2 : 3 ....10.

Anche qui l'errore viene commesso verso l'alto; talvolta esso è spostato verso destra, non mai a sinistra od in basso.

Nella tabella XI sono esposti i risultati ottenuti nelle 10 determinazioni per i 10 quadrati.

TABELLA XI.

Determinazioni	*10*	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*	*100*
I	—	—	0.40	0.50	1.00	0.75	1.25	1.75	1.75	1.50
II	—	—	0.60	0.75	1.00	1.00	1.25	1.40	1.90	2.40
III	—	0.20	0.75	0.90	1.00	1.60	1.50	1.90	2.00	2.00
IV	—	—	0.40	1.00	1.20	1.75	1.00	1.50	2.20	2.50
V	—	—	0.75	0.90	1.20	1.40	1.75	1.50	1.75	2.60
VI	—	—	0.20	1.00	1.20	1.50	1.50	1.80	1.75	2.00
VII	—	—	0.40	0.75	0.90	1.75	1.50	1.70	1.50	2.75
VIII	—	—	0.50	0.50	1.10	1.50	1.60	2.00	2.00	2.00
IX	—	0.25	0.25	0.60	0.75	1.40	1.50	2.00	2.10	1.50
X	—	0.25	0.50	0.75	0.75	0.75	1.50	1.50	2.00	2.50

TABELLA XII.

Quadrato presentato	Fo	Fu	F	Δm	w	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
30	0.58	0.37	0.475	0.1528	0.03962	0.01583	$\frac{1}{63.16}$
40	0.81	0.72	0.765	0.1560	0.04044	0.019125	$\frac{1}{52.29}$
50	1.08	0.94	1.010	0.1391	0.03607	0.0202	$\frac{1}{49.50}$
60	1.30	1.98	1.340	0.3204	0.03306	0.02233	$\frac{1}{44.78}$
70	1.35	1.52	1.435	0.1697	0.04399	0.02050	$\frac{1}{48.72}$
80	1.61	1.80	1.705	0.1950	0.05054	0.02131	$\frac{1}{46.92}$
90	1.92	1.87	1.895	0.1750	0.04536	0.02106	$\frac{1}{47.49}$
100	2.20	2.15	2.175	0.3953	0.1025	0.02175	$\frac{1}{45.98}$

Nella tabella XII sono indicati invece i valori di *Fo*, *Fu*, *Fm*, *w* e $\frac{F}{l}$ (per i quadrati da 30 a 100 mm. di lato) calcolati dai risultati nel modo detto per le antecedenti figure.

L'errore commesso per i quadrati di 10 e 20 mm. di lato è inferiore all'errore inerente al metodo stesso, errore che dalle variazioni medie si può dedurre essere di circa 0,2 mm. Per ciò non tenni calcolo neppure dei tre errori indicati nella tabella XI per il quadrato di 20 mm. di lato. *Fo* è generalmente superiore ad *Fu;* per i quadrati di 60, 70, 80 mm. di lato però avviene il contrario. L'errore medio variabile e l'errore probabile presentano valori inferiori ai corrispondenti valori trovati pei triangoli.

Anche in queste determinazioni *F* aumenta proporzionalmente alla lunghezza dei lati; e cioè alla grandezza dei singoli quadrati; quindi anche qui l'errore relativo si avvicina ad una costante, secondo la media aritmetica, di $\frac{1}{50}$ circa.

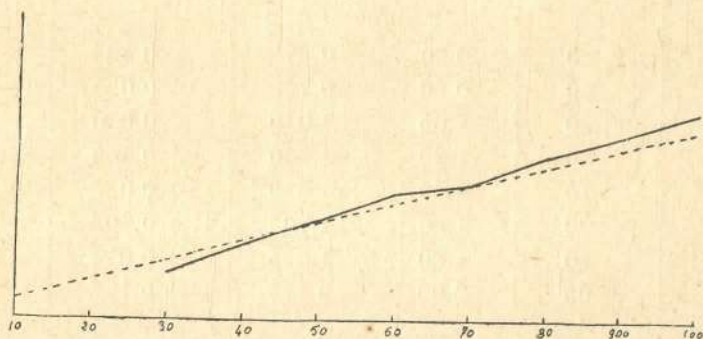



Fig. 11.

L'andamento delle curve che rappresentano l'errore costante e l'errore relativo, pur conservando il carattere della proporzionalità è diverso da quello delle corrispondenti curve dei triangoli e degli esagoni a due lati verticali, avvicinandosi invece a quelle degli esagoni a due lati orizzontali. La figura 11 rappresenta l'andamento dell'errore costante nelle serie dei quadrati da 30 a 100 mm. di lato. Sulla linea dell'ascissa vennero portate le grandezze dei lati nella loro successione alla distanza

di 15 mm., e sulle ordinate i valori di F, ridotti alla prima cifra decimale, per modo che ad ogni decimo del valore così ottenuto corrispondono 2 mm. Eseguiti i calcoli, trovato cioè il valore di F per il quadrato di 1 mm. di lato, facendo la media degli errori relativi, e da questo valore ricavati quelli che avrebbero dovuto avere i singoli F, se avessero seguito rigorosamente la legge di proporzionalità, potei costituire la linea punteggiata che rappresenta i valori di F ottenuti col calcolo, mentre la linea piena indica i valori corrispondenti ottenuti sperimentalmente.

Poichè la media degli $\frac{F}{l}$ è uguale a 0,02, ogni valore di F è dato da: $(0{,}02.n) \pm k$, dove n è la grandezza del lato e k corrispondente a quanto fu detto sopra. Tali valori sono esposti nella tabella XIII.

TABELLA XIII.

Quadrati	F ottenuto col calcolo	F ottenuto speriment.	k
30	0.60	0.475	— 0.125
40	0.80	0.765	— 0.035
50	1.00	1.010	— 0.010
60	1.20	1.340	+ 0.140
70	1.40	1.435	+ 0,036
80	1.60	1.705	+ 0.105
90	1.80	1.895	+ 0.095
100	2.00	2.175	+ 0.175

Dai valori di k e dalla curva della fig. 11 si vede chiaramente come l'errore costante tende ad aumentare, con la grandezza dei quadrati, più di quanto dovrebbe essere secondo il principio della proporzionalità.

La figura 12 rappresenta l'andamento dell'errore relativo. Mentre sull'ascisse sono portate le grandezze dei lati, sulle ordinate i valori di $\frac{F}{l}$ (ridotti alla terza cifra decimale): ad ogni unità del secondo ordine corrispondono due millimetri. Anche qui vediamo come l'errore relativo aumenta progressivamente

da 30 a 50 mm. di lato, per poi seguire un valore costante. La figura venne ridotta a due terzi.

Da questi fatti si può dedurre, mi pare, che nei quadrati vi è una sola causa d'errore, la quale nelle figure minori influisce meno che in quelle maggiori.

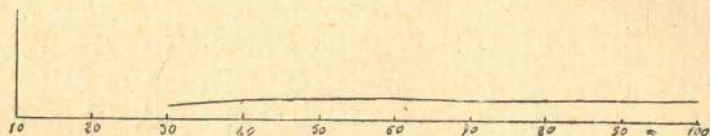



Fig. 12.

Questa causa d'errore va attribuita anzitutto alla nota illusione, secondo la quale i lati verticali di un quadrato appaiono maggiori degli orizzontali. Ed inoltre, siccome nella determinazione del centro si costruiscono soggettivamente le distanze che uniscono il centro coi vertici e con le metà dei lati, con linee più chiare dello sfondo, la causa per cui il centro viene spostato verso l'alto mi pare sia riposta nella cosidetta illusione della croce (1).

Quando osserviamo due segmenti uguali perpendicolari fra di loro ed intersecantisi nei punti medii, troviamo che il segmento verticale appare più lungo di quello orizzontale, che la metà superiore del segmento verticale appare maggiore di quella inferiore, e che, se si osserva monocularmente, la metà esterna del segmento orizzontale appare maggiore della metà interna. Costruendo soggettivamente le diagonali di un quadrato, ha influenza la prima illusione. Infatti, apparendo il quadrato come rettangolo, le diagonali soggettive si intersecheranno in un punto situato al di sopra del centro. Se si costruisce invece la croce, partendo dal centro (questo è il caso più frequente), influisce la seconda illusione: nel determinare la metà del segmento verticale la si sottoapprezza, poichè la

(1) W. Wundt, *Die geometrisch-optischen Täuschungen, Abhandlungen* di Lipsia, mathem, phys. Classe XXIV, 2, pp. 106 (54) e segg., 1898.

parte superiore appare maggiore della inferiore. Siccome infine le osservazioni avvenivano monocularmente, e precisamente con l'occhio destro, il segmento destro della croce doveva apparire maggiore del sinistro e conseguentemente il centro spostato a destra. Ciò tuttavia si verificò soltanto alcune volte.

Si verifica anche nelle mie ricerche il fatto ricordato da Wundt che « al di qua di una lunghezza di circa 10 mm. per ogni braccio della croce, la illusione diminuisce » (1). L'errore nell'apprezzamento del centro, legato all'entità di detta illusione, diminuisce, più che per gli altri quadrati, dal quadrato di 40 mm. a quello di 10 mm. di lato. Ciò si vede chiaramente in fig. 11, dove la curva degli errori costanti, partendo da un punto situato attorno a 40 mm. di lato, s'abbassa rapidamente verso 10 mm.

Queste illusioni determinanti l'errore nella determinazione del centro nei quadrati, sono pure la causa dell'errore negli esagoni a due lati orizzontali. Infatti, come dissi dianzi, fra le varie rappresentazioni che lo speciale presentarsi dell'esagono così orientato e l'introduzione del centro provocano nel soggetto, che osserva, la predominante, è quella del rettangolo. Per questa ultima forma si possono ripetere le medesime considerazioni fatte per i quadrati, ed attribuire, come causa d'errore nel determinare il centro, quelle trovate per essi.

Dal fatto però che la forma rettangolare nell'esagono non è che una rappresentazione e non diretta percezione, segue che l'errore relativo è assai minore che nei quadrati e, vedremo tosto, nei rettangoli. Infatti l'altezza del rettangolo *ABDE* (fig. 7) in funzione del lato dell'esagono è uguale

$$H = 2\sqrt{l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

e facendo gli opportuni passaggi:

$$H = l\sqrt{3}$$

(1) W. Wundt, *op. cit.*, pag. 107 (55).

L'errore relativo a questa altezza allora sarà:

$$\frac{F}{H} = \frac{F}{l\sqrt{3}} = \frac{F}{l}\,0.577$$

Per ottenere quindi l'errore relativo all'altezza è sufficiente moltiplicare i singoli errori relativi al lato per il fattore 0.577. Facilmente si vede che questi ultimi diminuiscono quasi della metà, ottenendosi una costante uguale a circa $\frac{1}{100}$.

6. — Risultati ottenuti nei rettangoli

Ad esaminare i rettangoli mi consigliò la considerazione dell'influenza che poteva avere sull'errore il variare dell'uno o dell'altro dei due elementi fondamentali in una forma quadrangolare e cioè dell'altezza e rispettivamente della base. Esaminai pertanto una serie di dieci rettangoli, nei quali due dei quattro lati erano costanti ed uguali a 50 mm., e gli altri lati variabili, secondo la tangente dell'angolo, formato dall'una o dall'altra diagonale coi lati costanti; quest'angolo da un minimo di 5° aumentava sino a 60°. Le costanti dei rettangoli esaminati sono espresse nella tabella XIV dove h significa il lato variabile ed a l'angolo sopraddetto.

Tabella XIV.

Rettangoli	a	h	Rettangoli	a	h
		mm.			mm.
1	5°	4,37	6	30°	28,87
2	10°	8,82	7	35°	35,01
3	15°	13,40	8	40°	41,96
4	20°	18,20	9	50°	59,59
5	25°	23,32	10	60°	86,60

L'altro lato, come dissi, rimane costante a 50 mm.

Esperimentai sui detti rettangoli sia quando il lato costante rappresentava la base, sia quando rappresentava l'altezza. Separatamente espongo le due serie di risultati.

Risultati ottenuti nei rettangoli a base costante. — L'errore è sempre commesso verso l'alto e leggermente spostato a destra. Come per le altre figure esaminate, nelle tabelle XV e XVI sono dati i risultati delle singole determinazioni e le medie dei varii errori. I vari rettangoli sono contraddistinti con i primi dieci numeri, i quali però non significano nessuna proporzionalità. Nella tabella XVI l'errore relativo è riferito alla altezza costante e non alla base variabile.

TABELLA XV.

Determinazioni	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
I	0.00	0.50	1.00	0.40	0.75	0.75	0.75	0.75	1.25	0.90
II	0.50	0.60	1.00	0.90	0.75	0.60	0.90	1.25	0.75	0.75
III	0.60	0.60	0.90	0.90	0.90	0.90	0.60	0.75	0.75	1.00
IV	0.40	0.00	0.60	0.75	1.00	0.75	0.90	0.50	0.50	1.25
V	0.50	0.00	0.75	0.80	0.50	0.75	1.20	0.90	0.75	1.25
VI	0.50	0.00	1.00	1.00	0.50	1.00	0.75	0.90	0.60	1.00
VII	0.75	0.00	0.90	0.75	0.75	0.90	1.25	0.75	0.50	1.00
VIII	0.00	0.60	0.50	0.60	0.00	1.00	0.75	0.60	0.75	0.75
IX	0.00	0.75	0.75	0.60	0.75	1.00	0.75	0.75	1.00	1.00
X	0.60	0.60	0.75	0.75	0.80	0.60	1.00	0.90	0.80	0.75

TABELLA XVI.

Rettangolo presentato	Fo	Fu	F	Δm	w	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
1	0.40	0.37	0.385	0.2435	0.0631	0.0077	$\frac{1}{129.86}$
2	0.34	0.39	0.365	0.3078	0.0798	0.0073	$\frac{1}{136.98}$
3	0.85	0.78	0.815	0.1528	0.0396	0.0163	$\frac{1}{61.35}$
4	0.75	0.74	0.745	0.1339	0.0347	0.0149	$\frac{1}{67.11}$
5	0.78	0.56	0.670	0.2129	0.0552	0.0134	$\frac{1}{74.63}$
6	0.75	0.90	0.825	0.1423	0.0369	0.0165	$\frac{1}{60.61}$
7	0.87	0.90	0.885	0.1739	0.0451	0.0177	$\frac{1}{56.50}$
8	0.83	0.78	0.805	0.1539	0.0399	0.0161	$\frac{1}{62.11}$
9	0.80	0.73	0.765	0.1592	0.0413	0.0153	$\frac{1}{65.36}$
10	1.03	0.90	0.965	0.1497	0.0388	0.0193	$\frac{1}{51.81}$

Dalle suesposte tabelle si nota che mentre l'errore medio nei rettangoli da 3 a 10 si avvicina ad una costante, se ne scosta nei rettangoli 1 e 2, nei quali si ha (per la piccola estensione del lato variabile) il passaggio dalla forma rettangolare al segmento. Dalla tabella XV si nota che la determinazione ottava del rettangolo 5 si scosta assai dalla media, essendo uguale a 0. Se noi facciamo i calcoli escludendo questa determinazione otteniamo per il detto rettangolo i seguenti valori:

$$Fo = 0.78; \quad Fu = 0.70; \quad F = 0.74; \quad \frac{F}{l} = 0.0148$$

valori che si avvicinano di più alla media degli F. Nella curva rappresentante l'andamento degli F ho sostituito al valore di F per il rettangolo 5, quello ottenuto, escludendo la ottava determinazione. Questa curva pertanto ha l'andamento dimostrato dalla fig. 13.

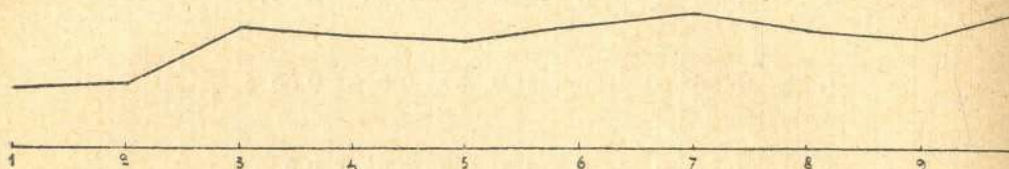



Fig. 13.

Osservando i valori di F e la curva della figura 13 si nota anzitutto che l'errore F almeno approssimativamente è proporzionale non alla estensione variabile dei rettangoli, ma all'altezza, ed essendo questa costante per tutti i rettangoli, rimane costante esso pure. L'errore F però in ogni caso è minore dell'errore commesso nel quadrato di 50 mm. di lato: errore uguale ad 1.01 ossia ad 1.00.

La media (Fm) degli errori F (escludendo quelli per i rettangoli 1 e 2, che cadono evidentemente fuori) è di 0.818125 ossia di 0.82. Da questa media si scostano i varii F e precisamente nella misura esposta dalla seguente tabella (XVII) in cui Fm significa l'errore costante medio e d gli scarti dei vari F da Fm. Anche qui non sono considerati i rettangoli 1 e 2.

TABELLA XVII.

Rettangoli	F	Fm	d
3	0.815	0.820	— 0.005
4	0.745	0.820	— 0.075
5	0.740	0.820	— 0.080
6	0.825	0.820	+ 0.005
7	0.885	0.820	+ 0.055
8	0.805	0.820	— 0.015
9	0.765	0.820	— 0.055
10	0.965	0.820	+ 0.145

Da questa tabella e dalla curva della figura 13 si vede che i valori di F per i rettangoli 3, 6, 7 e 10 sono valori massimi, minimi quelli per i rettangoli 4, 5 e 9.

Il Lohnert (1) studiando l'azione di induzione dell'altezza sopra la larghezza nei rettangoli, ove l'una o l'altra delle due componenti rimanga costante, trovò che nelle figure da lui distinte con IV, V, VI, VIII e IX l'azione di induzione era massima. Le figure del Lohnert avevano le costanti esposte nella tabella seguente in cui h significa l'altezza ed l la larghezza.

TABELLA XVIII.

Figura	l	h	Figura	l	h
I	2	60	VI	40	60
II	5	60	VII	60	60
III	10	60	VIII	80	60
IV	20	60	IX	100	60
V	30	60			

Riducendo al medesimo rapporto delle figure del Lohnert le componenti dei rettangoli, in cui nelle mie esperienze si hanno i massimi valori di F, otteniamo per i rettangoli:

3) $13{,}4 : 50 = x : 60 = 16{,}08 : 60$
6) $28{,}87 : 50 = x : 60 = 34{,}64 : 60$
7) $35{,}01 : 50 = x : 60 = 42{,}01 : 60$
10) $86{,}6 : 50 = x : 60 = 103{,}92 : 60$

e cioè i rettangoli 3, 6, 7, 10 si avvicinano assai alle figure IV, V, VI, IX del Lohnert. Le quali secondo il medesimo autore sono anche le preferite esteticamente. Anzi vi è un rapporto tra il sentimento estetico e la grandezza delle azioni di induzioni, nel senso che quello cresce in proporzione diretta di queste (2). Anche i rettangoli 3, 6, 7, 10 sono i preferiti esteticamente. Essi pertanto, come le figure IV, V, VI, IX del Loh-

(1) K. LOHNERT, *Untersuchungen ü. die Auffassung. v. Rechtecken. Psych Studien*. Bd. IX, pag. 213.
(2) *Ibidem*, pag. 214.

nert, rappresentano figure, nelle quali la forma di rettangolo viene percepita più facilmente come tale.

In essi meno facilmente si possono scindere i vari elementi tra di loro; più agevolmente quindi nascono quelle rappresentazioni che, legate intimamente alla forma del complesso, sono causa di errore qualora accompagnate da illusioni ottiche.

Così nella determinazione del centro nei rettangoli ad altezza costante nasce, come nei quadrati, la rappresentazione della croce, le cui braccia si intersecano nel centro e partono dalle metà dei lati. Già per i quadrati ho detto a quali illusioni ottiche fosse soggetta questa rappresentazione e come fosse la causa dell'errore nella determinazione del centro in quelli. Tale causa vale pure per i rettangoli e specialmente per quelli sopradetti, nei quali sia il sentimento estetico, sia il rapporto fra i lati, rappresentano le migliori condizioni per la percezione del rettangolo, come tale, e, nel tempo stesso, per la formazione della rappresentazione della croce. Negli altri rettangoli invece la determinazione del centro va soggetta non tanto all'influenza della rappresentazione della croce, ma si cerca piuttosto di trovare la metà di un lato prima e del secondo lato poi. Nello apprezzamento della metà della base si sposta il centro verso destra; nell'apprezzamento dell'altezza invece si sottoapprezza la metà superiore ed il centro quindi viene spostato verso l'alto, ma non tanto come nei rettangoli esteticamente preferiti.

Va notato poi che la causa d'errore pure essendo identica a quella dei quadrati, agisce con effetti minori, tanto che non si raggiunge mai il valore di 1.00 che è l'errore commesso nel quadrato di 50 mm. Nei rettangoli infine 1 e 2 non si ha più la forma di rettangolo, ma quella di un segmento, del quale si cerca la metà; manca quindi altra causa d'errore che non sia il soprapprezzamento delle metà superiori e quello perciò è assai piccolo.

L'illusione ottica di contrasto tra la base e l'altezza dei rettangoli non ha invece, per quanto risulta dalle mie esperienze, nessuna influenza.

Risultati nei rettangoli a base costante. — I rettangoli adoperati sono i medesimi della ricerca antecedente, essi però sono diversamente orientati. Valgono per essi le costanti date a pag. 95. Mentre la base rimane costante ed uguale a 50 mm. l'altezza varia da un valore minimo di mm. 4.37 per il rettangolo 1 ad un valore massimo di mm. 86.6 per il rettan-

golo 10. Nei rettangoli da 1 a 5, nell'apprezzamento del centro, non si commettono errori che abbiano i caratteri di costante. Infatti non soltanto la loro entità è o inferiore o di troppo poco superiore all'errore inerente al metodo stesso, ma la direzione di essi varia nelle varie determinazioni.

Nella tabella XIX sono indicati gli errori commessi nelle singole determinazioni per i primi 5 rettangoli. Accanto ad ogni determinazione è indicata la direzione dell'errore: *D* significa a destra, *S* a sinistra, *A* in alto, *B* in basso.

TABELLA XIX.

Determinazioni	*1*		*2*		*3*		*4*		*5*	
I	0.00	—	0.50	*S*	0.20	*A*	0.20	*S*	0.00	—
II	0.50	*D*	0.50	*D*	0.50	*D*	0.60	*D*	0.00	—
III	0.00	—	0.00	—	1.00	*D*	0.00	—	0.40	*D*
IV	0.10	*D*	0.00	—	0.00	—	0.20	*D*	0.20	*D*
V	0.20	*S*	0.40	*D*	0.50	*A*	0.20	*A*	0.20	*A*
VI	0.20	*D*	0.00	—	0.20	*D*	0.40	*D*	0.40	*D*
VII	0.10	*D*	0.40	*D*	0.00	—	0.50	*D*	0.00	—
VIII	0.20	*D*	0.50	*D*	0.40	*D*	0.50	*D*	0.20	*B*
IX	0.20	*D*	0.20	*D*	0.40	*A*	0.00	—	0.00	—
X	0.20	*D*	0.00	—	0.20	*D*	0.00	—	0.00	—

Per quanto la direzione varii nei singoli errori, è degno di nota che la direzione predominante è verso destra. Ciò significa che la metà destra del rettangolo appare maggiore di quel che è in realtà. Il fatto che si manifesta anche per le altre figure è dovuto senza alcun dubbio alla visione monoculare destra.

Nei rettangoli da cinque a dieci invece, l'errore ha una direzione costante e cioè verso l'alto. Esso pertanto sia per la sua entità, sia per la direzione invariabile può essere ritenuto come costante. Mentre nei primi cinque rettangoli l'altezza aveva un massimo di 23,32 mm. in questi ultimi l'altezza ha un valore minimo di 28,87 mm. ed un massimo di 86,6. Già nei quadrati si è visto che in quelli aventi rispettivamente 10 e 20 mm. di lato non si commettevano errori apprezzabili. Considerando la sola altezza, si ripete il medesimo fatto anche nel caso presente,

in cui pei rettangoli aventi un'altezza minore di mm. 23,32 non si commettono errori costanti.

Nelle tabelle XX e XXI sono esposti, nel modo solito, i valori delle singole determinazioni (tabella XX) ed i valori degli errori medi (tabella XXI), per i rettangoli da 6 sino a 10.

Tabella XX.

Determinazioni	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
I	0.00	0.50	0.50	1.20	1.50
II	0.60	0.40	0.60	1.40	1.50
III	0.60	0.50	0.80	1.00	1.70
IV	0.50	0.75	0.75	0.75	1.60
V	0.70	0.60	0.75	1.00	1.50
VI	0.50	0.75	0.40	0.60	1.50
VII	0.00	0.75	0.60	0.90	1.70
VIII	0.20	0.40	0.90	1.40	2.20
IX	0.50	0.50	0.75	0.80	1.50
X	1.00	0.50	0.60	1.40	0.00

Tabella XXI.

Rettangolo presentato	*Fo*	*Fu*	*F*	*Δm*	*w*	$\frac{F}{l}$	$\frac{F}{l}$
6	0.48	0.44	0.460	0.2424	0.0628	0.0159	$\frac{1}{62.66}$
7	0.55	0.58	0.565	0.1244	0.0322	0.0161	$\frac{1}{61.96}$
8	0.68	0.65	0.665	0.1318	0.0342	0.0159	$\frac{1}{63.09}$
9	1.07	1.02	1.045	0.2572	0.0667	0.0175	$\frac{1}{57.02}$
10	1.56	1.38	1.470	0.1514	0.0402	0.0170	$\frac{1}{58.91}$

Dalle due tabelle suesposte si vede chiaramente che non soltanto l'errore è proporzionale all'altezza, ma che aumenta più di quanto sia richiesto dalla proporzionalità stessa. Così se facciamo la media degli errori relativi, uguale a 0.0165, riducendo alla quarta cifra decimale, vediamo che nei rettangoli 6, 7 ed 8 l'errore relativo è inferiore; in quelli 9 e 10 superiore alla media stessa.

Si rivela quindi un comportamento analogo a quello dei quadrati, dove si verificava il medesimo fenomeno: comportamento analogo, come identiche sono le cause d'errore nei due casi. Anche qui abbiamo il formarsi della rappresentazione della croce, sebbene a braccia disuguali. In quest'ultimo fatto credo sia riposta la causa, che, mentre nei quadrati si commette un errore relativo uguale a circa 0.02, nel caso dei rettangoli ha un valore di circa 0.017; ossia l'errore assoluto F è minore in questi che nei quadrati.

Non sempre tuttavia si forma l'illusione della croce, ma soltanto quando la figura viene percepita come rettangolo. Infatti quando tra la base e l'altezza vi è una differenza soverchia, allora l'attenzione essendo rivolta verso quello dei due elementi della figura che maggiormente si impone per la sua estensione, il rettangolo non è percepito come tale, ma piuttosto come un segmento o verticale se la base è molto piccola, o orizzontale, se lo è l'altezza. In tal caso non si ha più, nella determinazione del centro, la rappresentazione della croce; cioè non si riferisce più la posizione del centro simultaneamente alle metà dei due lati, ma soltanto alla metà di un solo lato. Allora la determinazione del centro è soggetta alle cause d'errore, inerenti non all'intero complesso, ma ad una sola estensione.

Così anche nei rettangoli ad altezza costante (sebbene qui entrino in giuoco altri fattori) per quelli da 1 a 5, ad eccezione del rettangolo 3, si hanno i valori minimi dell'errore relativo. Per i rettangoli 1 e 2 poi è chiaro che si riferisce la posizione del centro alla sola altezza.

Per i primi cinque rettangoli a base costante, anche se il riferimento del centro avviene rispetto ai due lati, vale il fatto già ricordato pei quadrati che l'illusione nella figura della croce diminuisce al di qua di una estensione di 10 mm. per ogni braccio della croce.

L'errore del centro essendo poi tanto nei rettangoli ad altezza costante, quanto in quelli a base costante, qualora le figure siano percepite come rettangoli, proporzionale all'altezza, si deducono due fatti. Il primo che si ha da escludere qualsiasi influenza delle diagonali, infatti le variazioni dell'angolo formato da esse con il lato costante hanno valore soltanto perchè mutano l'estensione dell'altezza; il secondo che nelle figure ad abito rettangolare l'altezza è l'elemento, la cui variazione produce un variare dell'illusione, inerente alla rappresentazione della croce e quindi un variare dell'entità dell'errore, nell'apprezzamento del centro.

7. — Risultati ottenuti nei rombi

Esaminai una serie di sette rombi aventi i lati uguali a 50 mm. Essi differivano tra di loro per gli angoli formati dai lati. I quali da un angolo di 20° (angolo *a*) della figura 12 variavano ad uno di 80°, differendo l'uno dall'altro di 10° in 10°. Esaminai i rombi nell'orientamento indicato nella figura 12 e li contraddistinsi con da 1 a 7.

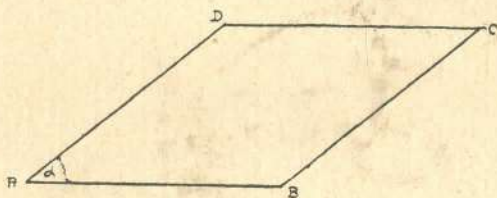



Fig. 14.

Nel determinare il centro dei rombi, così orientati, non si commette nessun errore costante. Ciò risulta dalla tabella XXII, nella quale sono esposti i risultati delle singole determinazioni, con la direzione dell'errore. Come dianzi *A* significa verso l'alto, *B* verso il basso, *D* a destra, *S* a sinistra.

TABELLA XXII.

Determinazioni	*1*		*2*		*3*		*4*		*5*		*6*		*7*	
I	0.00	—	0.40	*B*	0.90	*S*	0.90	*B*	0.00	—	1.40	*S*	0.00	—
II	0.00	—	0.00	—	0.60	*S*	0.75	*S*	0.60	*S*	0.50	*A*	0.90	*A.D*
III	0.00	—	0.40	*B*	0.90	*S*	0.50	*B*	0.40	*B*	0.50	*S*	0.75	*A.D*
IV	0.20	*A*	0.60	*S*	0.60	*S*	0.00	—	0.50	*S*	0.75	*A*	1.25	*A.D*
V	0.00	—	0.00	—	0.90	*S*	0.60	*B*	0.50	*S*	0.60	*B*	0.40	*A*
VI	0.25	*A*	0.00	—	0.90	*S*	0.50	*B*	0.60	*S*	0.80	*S*	0.75	*D*
VII	0.25	*A*	0.50	*B*	0.75	*B*	0.75	*B*	0.00	—	0.60	*S*	0.60	*A*
VIII	0.25	*A*	0.00	—	1.00	*B*	0.00	—	0.25	*B*	0.50	*B*	0.90	*A.D*
IX	0.25	*D*	0.00	—	0.90	*S*	0.50	*B*	0.60	*B*	0.75	*S*	1.00	*D*
X	0.00	—	0.50	*B*	0.75	*S*	0.75	*B*	0.00	—	0.50	*S*	0.75	*A.D*

Come senz'altro risulta dai valori esposti, non si può parlare di errore costante: il variare della direzione nelle singole determinazioni di una serie non consente il calcolo delle medie e denota l'influenza di cause d'errore mutevoli. Che vi siano cause d'errore, oltre a quella propria del metodo adoperato, non si può mettere in dubbio, chè se si eccettuano i primi due rombi, gli errori sono sempre superiori a quello, ammesso di mm. 0,2, inerente al metodo stesso.

Ciò risulta poi anche dalla grande difficoltà provata, nella determinazione del centro. Mentre per le altre figure il centro una volta determinato veniva a costituire un nuovo complesso, la figura centrata, così non è nei rombi, se si eccettua, nel caso presente, il rombo 7.

Negli altri non si ha la percezione di un complesso, ma il centro disturba e provoca il formarsi di rappresentazioni *indipendenti*. Così la rappresentazione dei triangoli *BDC* e *DBA* secondo la diagonale diretta da sinistra in alto a destra in basso, e dei triangoli *ACD* e *ACB* secondo la diagonale diretta da sinistra in basso a destra in alto.

Sia nell'uno quanto nell'altro caso, per determinare il centro, si cerca sempre il punto di mezzo della diagonale che rappresenta il lato comune dei due triangoli, costituenti l'una o l'altra delle due coppie.

Il fatto poi che la direzione predominante degli errori è la sinistra credo sia dovuto all'influenza dell'angolo $D\hat{C}B$ e della diagonale AC.

È ben nota l'illusione che il punto di mezzo dell'altezza di un triangolo isoscele appare spostato di molto verso l'alto; illusione dovuta, come si sa, alla influenza delle punte. Parimenti nel caso nostro l'angolo $D\hat{C}B$ influisce per modo che il punto di mezzo della diagonale appare spostato in alto verso

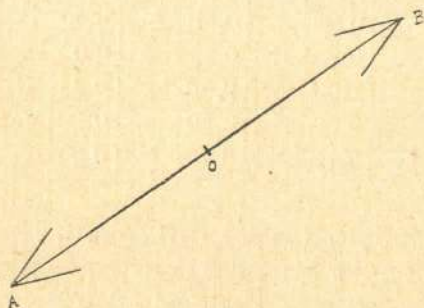



Fig. 15.

destra, onde si eseguisce, per determinare il centro, una correzione, producente un errore nel senso opposto. Tale illusione è manifesta nella figura 15 nella quale i lati del rombo sono sostituiti dai segmenti terminanti negli estremi A e B. Il punto di mezzo O appare spostato lievemente verso l'alto a destra.

Si tende poi a correggere l'errore dovuto alla illusione suddetta per il formarsi della rappresentazione dei triangoli ADB e DBC; perciò appunto non si ha un errore costante verso sinistra. A secondo dell'oscillare dell'attenzione tra le due rappresentazioni si ha l'imporsi di un errore verso sinistra o di un errore verso il basso o della mancanza di errore.

L'errore commesso verso il basso è dovuto ad una illusione identica a quella della figura 15, che si presenta nella diagonale DB.

Per essa il punto di mezzo appare spostato verso l'alto. Io credo infine che l'impossibilità, osservata talvolta, dell'imporsi dell'una o dell'altra rappresentazione e il continuo oscillare fra le medesime sia la causa della mancanza di errore.

Quanto maggiore diventa l'angolo a, quanto più cioè il rombo assume l'abito rettangolare, tanto più scompaiono le condizioni suddette. Così nel rombo 7 con l'angolo a uguale a 80° si hanno le condizioni proprie del rettangolo e quindi l'errore è commesso nuovamente verso l'alto e lievemente a destra.

L'impossibilità dunque dello stabilirsi di uno stato di equilibrio ha per conseguenza che non soltanto il rombo centrato difficilmente appare come un tutto, non soltanto la determinazione del centro non va soggetta ad alcun errore costante, ma non si ha nessun sentimento estetico.

8. — Risultati ottenuti nei cerchi

Esaminai una serie di dieci cerchi che variavano secondo il raggio il quale da un minimo di 10 mm. aumentava di 10 mm. sino ad un massimo di 100 mm.

Nella determinazione del centro dei cerchi non si può parlare di errore costante. Nella tabella XXIII, nel modo solito, sono esposti come esempi i risultati ottenuti in 5 serie di dieci determinazioni. Accanto ad ogni determinazione, come nei precedenti casi, sono date le direzioni.

Tabella XXIII.

Determinazioni	*20*		*40*		*60*		*80*		*100*	
I	0.00	—	0.75	*B*	0.50	*B*	0.00	—	0.50	*B*
II	0.00	—	0.00	—	0.50	*B*	0.50	*D*	0.50	*B*
III	0.00	—	0.75	*B*	0.75	*S*	0.25	*B*	0.75	*S*
IV	0.25	*A*	0.00	—	0.00	—	0.00	—	0.00	—
V	0.25	*B*	0.00	—	0.50	*D*	0.25	*S*	0.50	*A*
VI	0.25	*B*	0.00	—	0.00	—	0.25	*B*	0.00	—
VII	0.25	*B*	0.75	*A*	0.00	—	0.00	—	0.00	—
VIII	0.00	—	0.00	—	0.00	—	0.00	—	0.00	—
IX	0.25	*A*	0.00	—	0.00	—	0.40	*B*	0.00	—
X	0.00	—	0.00	—	0.50	*A*	0.50	*A*	0.50	*A*

Si vede chiaramente che non si può parlare di errore costante e che i piccoli errori commessi sono dovuti a cause accidentali. Ricordo che il Prof. Kiesow avendo sperimentato sulla serie intera dei 5 cerchi commise un errore per ognuno di essi uguale a 0,5 mm.

Nella determinazione del centro il sentimento estetico è predominante. Basta un lieve spostamento, affinchè nasca un sentimento di dispiacere. Si è guidati piuttosto da questo fatto che non dal confronto di distanze.

Credo che la mancanza di errore costante nella determinazione del centro dei cerchi sia dovuta al fatto che nel cerchio non si ha l'illusione della verticale. Wundt (1) infatti dice: « So ist es eine bemerkenswerthe Tatsache, dass die constanten Täuschungen und vor allem die stärkste derselben, die scheinbare Ungleichheit gleicher verticaler und horizontaler Strecken, zwar an allen von geraden Linien umschlossenen oder von geradlinigen Durchmessern durchkreuzten Figuren hervortritt, dass aber am Kreise keine Spur derselben bemerkbar ist ».

9. — Divisione delle figure piane geometriche rispetto all'apprezzamento del centro

I risultati della presente ricerca e le considerazioni fatte sopra le cause di errore nell'apprezzamento del centro permettono di distinguere le forme piane geometriche rispetto al centro, in due classi: figure per le quali non si commette errore nell'apprezzamento del centro e figure per le quali si commettono errori. Alle prime appartiene, per quel che riguarda le presenti ricerche, solamente il cerchio, alle seconde appartengono le altre figure. Quest'ultime vanno distinte alla loro volta in due classi: figure ad abito rettangolare e figure ad abito triangolare. Alle prime appartengono quelle nelle quali due sono le direzioni predominanti, alle seconde quelle

(1) W. Wundt., *Die geometrisch-optischen Täuschungen*, ecc., pp. 112 (60) e seg.

in cui ve ne sono tre. I rombi rappresentano una classe intermedia; infatti in questi le direzioni delle diagonali si impongono, quanto le direzioni dei lati.

Ad abito rettangolare sono i quadrati, i rettangoli sia a base sia ad altezza costante e gli esagoni a due lati orizzontali. Ad abito triangolare sono i triangoli e gli esagoni a due lati verticali. Il formarsi delle direzioni come rappresentazioni è dovuto ad un processo di analisi che necessariamente si compie durante la costruzione del centro e dalle speciali caratteristiche delle forme stesse.

Queste rappresentazioni che si formano durante il processo della determinazione del centro, possono essere legate ad illusioni ottiche, la correzione delle quali sposta il centro dalla sua posizione geometrica. Nel cerchio ove infiniti sono i vertici ed infiniti i lati non è possibile il formarsi di rappresentazioni, perciò appunto nell'apprezzarne il centro non si commettono errori.

10. — Significato del centro soggettivo

La differenza tra il centro geometrico e il centro soggettivo è talvolta rilevante, come nei triangoli, tal'altra meno, cosicchè può essere posta in evidenza soltanto con un processo costruttivo, specialmente nelle figure di non grande estensione. Questa differenza, a parer mio, pone in giusto rilievo come la percezione di una forma dipenda non già dall'assoluta eguaglianza tra lati ed angoli, non soltanto dal modo sotto il quale appaiono le singole parti (lati verticali maggiori degli uguali orizzontali, ecc.), ma dal fatto che alla percezione del complesso come tale si associa la rappresentazione di forme più semplici, che dalle parti del complesso stesso si possono originare. Così nel quadrato le due direzioni altezza e larghezza, proprie a quattro lati, nella rappresentazione della croce, partente dalla metà dei lati, si trovano in una forma assai più semplice. Ciò è più evidente ancora negli esagoni dove per quelli a due lati orizzontali si ha la rappresentazione di un rettangolo, in quelli a due lati verticali di tre sole direzioni (triangolo). Tale pro-

cesso di scomposizione è facilitato infine dalla costruzione del centro, la posizione del quale è riferita di preferenza alle rappresentazioni più semplici, che non all'intero complesso.

Sia notato che la maggiore o minore semplicità di una figura non consiste soltanto nel numero maggiore o minore di elementi, ma è determinata altresì da varie altre cause, che non sempre è possibile stabilire e la cui ricerca esce fuori dallo scopo di questa mia.

Mi pare tuttavia che la costruzione del centro, facilitando appunto il manifestarsi di tali rappresentazioni, consenta, come si vide negli esempi sopra portati, di trovare le analogie psicologiche fra le varie figure geometriche: ciò può avere la sua importanza.

Non so infine se mi sia lecito parlare qui di una legge di massima economia, anche nel vasto campo delle percezioni visive, tanto più che nello stabilire le modalità di essa si dovrebbero seguire criteri, forse assai differenti, da quello che può apparire a bella prima.

11. — Influenza del sentimento estetico

Quando si è raggiunta la posizione soggettiva del centro, sia che questo all'intero complesso, oppure venga riferito ad altre rappresentazioni, nasce un sentimento di forma (Gestaltgefühl) (1). Ciò avviene non per tutte le figure e non con la medesima evidenza in tutti quei soggetti che ebbi occasione di esaminare.

In me il sentimento estetico è generalmente così vivo che ero reso accorto più da questo che da altri criteri della raggiunta posizione del centro. E specialmente ciò avveniva nei cerchi; in misura minore negli esagoni, nei quadrati, nei rettangoli e nei triangoli. Nei rombi la figura centrata era per me esteticamente spiacevole.

Al prodursi di un sentimento estetico giova la formazione

(1) W. Wundt, *Grundzüge*, ecc. III^{6}, pp. 134 e segg.

di rappresentazioni chiare di altre forme ed un raggiunto stato di equilibrio. Riguardo agli altri soggetti, il soggetto *M.C.* (Torino), ad esempio, non sapeva dire se la percezione della figura centrata le procurava un sentimento di piacere. Il Prof. Kiesow provava un sentimeno di piacere soltanto pei cerchi. Il Prof. Gemelli aveva chiaramente le rappresentazioni, dette sopra per gli esagoni, e provava un sentimento estetico. Nel soggetto *T.C.* la determinazione del centro nei quadrati, triangoli, cerchi (non venne esaminata per le altre figure) s'accompagnava con un sentimento estetico di piacere.

12. — Costanza dell'errore relativo

Nell'esame delle figure di cui è argomento la presente ricerca, quando le cause d'errore rimangono le medesime, l'errore aumenta in proporzione diretta rispetto all'aumento della causa di errore. Siccome questa è, come si vede, intimamente legata all'estensione della figura stessa, si può dire che l'errore aumenta proporzionalmente alla grandezza della figura. Pertanto l'errore relativo all'estensione della figura (per esprimere la quale considerai i lati), è uguale ad una costante. Tale errore relativo è uguale circa per i quadrati ad $\frac{1}{50}$, per i triangoli ad $\frac{1}{25}$, per gli esagoni a due lati orizzontali ad $\frac{1}{53}$, per gli esagoni a due lati verticali ad $\frac{1}{40}$, per i rettangoli ad altezza costante, riferito all'altezza ad $\frac{1}{61}$, per quelli a base costante, riferito all'altezza ad $\frac{1}{59}$. Le deviazioni da questa legge di proporzionalità specialmente per il caso degli esagoni a due lati verticali vennero già spiegate. Esse sono dovute essenzialmente all'introdursi di una causa d'errore opposta alla predominante.

La costanza dell'errore relativo palesa una legge di proporzionalità simile a quanto esige la legge di Weber.

Ma si tratta qui veramente della legge di Weber? In questa

legge si tratta del rapporto che esiste tra l'intensità dello stimolo e la sensazione; nel caso mio invece lo stimolo è una figura soggetta ad illusioni ottiche, dalle quali dipende la percezione della figura centrata soggettivamente esatta. Si tratta di un rapporto fra i risultati di due processi che vanno al di là della semplice sensazione.

Siccome tuttavia l'entità dell'illusione ottica è legata alla grandezza della figura presentata, mi pare che la costanza dell'errore relativo si possa considerare come un caso analogo ai fatti espressi dalla legge di Weber, caso che dimostra vieppiù come questa legge sia una legge di relatività psichica, dipendente da fattori psichici e non da dati fisiologici.

13. — Conclusione

Riassumendo adunque i risultati delle ricerche esposte, è chiaro, mi pare, che fra il centro soggettivo di una figura piana geometrica e quello geometrico può esservi una differenza in una determinata direzione. L'errore che si commette in questo caso è dovuto alle speciali peculiarità della figura stessa, le quali, nella costruzione del centro, provocano il formarsi di rappresentazioni di forme, a cui il centro viene riferito. Se queste forme vanno accompagnate da illusioni ottiche la posizione del centro soggettivo viene determinata nel senso opposto alle illusioni stesse.

L'errore varia di entità col variare della grandezza della figura, secondo una proporzione diretta in modo analogo a quanto, in altro campo, dice la legge di Weber.

Infine l'errore commesso nel determinare il centro, permette di mettere in evidenza le analogie psichiche tra le varie figure, ed il modo col quale di preferenza si fondono in noi i vari elementi di un complesso.